Euler y La Conjetura de Fermat sobre Números Triangulares

José Manuel Sánchez Muñoz

5 de febrero de 2011

Resumen

Este artículo describe la historia de como Euler demostró la existencia de infinitos números triangulares bicuadráticos, desde su correspondencia con su amigo Christian Goldbach hasta la publicación de sus resultados en la Academia de San Petesburgo.

1. La Conjetura

Podemos considerar sin lugar a equívocos que el gran genio matemático francés Pierre de Fermat fue quizás junto a su amigo y coterráneo René Descartes una de las principales figuras de las matemáticas de la primera mitad del siglo XVII.

Fermat acostumbraba a estudiar problemas sobre propiedades de números. En sus lecturas de la *Arithmetica* de Diofanto, a menudo realizaba anotaciones, desafortunadamente muchas de ellas sin demostración, que en multitud de ocasiones se convertirían en conjeturas unas veces, y en teoremas otras.

En una de estas anotaciones se presenta el problema que más adelante, ya en el segundo cuarto del siglo XVIII, el prolífico matemático suizo Leonhard Euler, animado por su gran amigo y confidente Christian Goldbach, refutaría. Fermat conjeturó que

"Ningún número triangular entero es un bicuadrado"

es decir

$$\frac{x(x+1)}{2} \neq n^4$$

2. Euler y su correpondencia con Goldbach

A lo largo de la historia de las matemáticas hay personajes que escribieron con letras de oro la evolución y los nuevos descubrimientos y avances de la misma, a los que admiramos por el ingenio de sus demostraciones o la efectividad que nos revelan sus aplicaciones. Desafortunadamente Christian Goldbach no se encuentra dentro de este grupo de elegidos, pero no por ello deja de tener importancia y significado dentro de la historia de las matemáticas.

Euler y Goldbach se conocieron en 1727, tras la llegada del segundo a San Petesburgo, poco antes de su nombramiento como tutor del zar Pedro II, siendo Euler un joven de tan sólo 20 años, y Goldbach, 17 años mayor que él, Secretario de la Academia de Ciencias. Comenzaron entonces una relación de amistad y confidencialidad que duraría hasta la muerte de Goldbach, y que dió como fruto multitud de los resultados que Euler presentó a lo largo de toda su vida. Goldbach comprendía mejor que nadie las implicaciones de los aportes de Fermat a la teoría de números, y sería injusto no reconocer el mérito que tuvo sobre la figura de Euler estimulándole en multitud de investigaciones que este llevó a cabo, apuntando certeramente hacia donde debían centrarse sus esfuerzos.

Para ser justo, debemos decir que las conjeturas que Goldbach presentaba a Euler en su correspondencia no siempre eran válidas. Precisamente el problema que tratamos en este artículo es uno de estos casos. En una de las multitudes cartas de su correspondencia mutua, Euler expone que podía probar que existen infinitos números raciones x para los cuales $\frac{x(x+1)}{2} = n^4$, en particular le expuso a Goldbach el caso $x = \frac{32}{49}$, para el que:

$$\frac{x(x+1)}{2} = n^4 = \left(\frac{6}{7}\right)^4$$

Goldbach respondió enseguida que había enviado a Daniel Bernoulli desde Moscú una carta con una demostración del mencionado teorema de Fermat, y de su *demostración* se podía afirmar que los números triangulares enteros diferentes del 1 y del 36 no podían ser cuadrados. A Euler este hecho le resultó muy chocante y se puso a trabajar en una demostración que lo refutara. Tras pocos días Euler había dado con la demostración que buscaba. Llegó a ella mediante el estudio profundo de las soluciones enteras de las ecuaciones diofánticas del tipo $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y^2$ y el importantísimo caso estudiado por Fermat y Wallis $x^2 - dy^2 = 1$ donde d no es un cuadrado (*).

3. Los números triangulares bicuadrados

Aparentemente la existencia de infinitos números triangulares que son cuadrados perfectos no resulta tan evidente como Euler nos puede haber hecho creer. Se trata de probar que existen infinitos pares de enteros (m, n) que solucionan la ecuación:

$$m^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

transformemos la ecuación, de tal forma que lleguemos a una ecuación que injustificadamente Euler llamó *Tipo Pell*, y decimos injustificamente puesto que el matemático inglés John Pell[1] a quien Euler alude, no trató este asunto jamás.

$$\begin{aligned} m^2 = \tfrac{n(n+1)}{2} \quad &\Leftrightarrow 2m^2 = n^2 + n \\ &\Leftrightarrow 8m^2 = 4n^2 + 4n \\ &\Leftrightarrow 8m^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 1 \\ &\Leftrightarrow 8m^2 + 1 = (2n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow (2n+1)^2 - 8m^2 = 1 \end{aligned}$$

Podemos observar que esta última es la ecuación de Pell con $x = 2n + 1$, $y = m$, y $d = 8$. Se puede comprobar que una solución se obtiene para $n = m = 1$, es decir $(x_0, y_0) = (1, 3)$.

Con respecto a esta última ecuación, ya anteriormente Brahmagupta en el siglo VII la había estudiado, y al parecer había aparecido por primera vez en la historia con el problema de los bueyes de Arquímedes. Esta ecuación fue resuelta en algunos casos particulares por el matemático Bashkara, hindú como Brahmagupta, en el siglo XII.

Respecto a la ecuación de Pell, se conoce un resultado, no fácilmente demostrable, que expresa lo siguiente:

> Sea d un número entero que no es cuadrado perfecto. Si el par de enteros (x_0, y_0) es una solución de la ecuación de Pell $x^2 - dy^2 = 1$, entonces existen infinitas soluciones (x_n, y_n) de la ecuación, dadas por la fórmula:
> $$x_n + \sqrt{d} y_n = (x_0 + \sqrt{d} y_0)^n$$

Si aplicamos este resultado a nuestro caso, y consideramos como solución inicial $(x_0, y_0) = (3, 1)$:

$$x_n + 2\sqrt{2} y_n = (3 + 2\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (2\sqrt{2})^k =$$

$$= \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (2\sqrt{2})^k + \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{k} 3^{n-k} (2\sqrt{2})^k =$$

$$= \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{k} 3^{n-2k} (2\sqrt{2})^{2k} + \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{k} 3^{n-2k-1} (2\sqrt{2})^{2k+1} =$$

$$\sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{k} 3^{n-2k}\, 8^{2k} + \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{k} 3^{n-2k-1}\, 8^{2k}$$

[1] John Pell fue un matemático inglés que vivió durante el siglo XVII. El caso es que no está muy claro por qué este tipo de ecuaciones llevan su nombre. Al parecer el error lo cometió Euler al asociar un método de resolución de este tipo de ecuaciones a Pell en vez de a William Brouncker, el verdadero propietario de dicho método de resolución, que fuera presidente de la Royal Society. En su época Euler era un escritor muy leído, por lo que la inclusión de este fallo en alguna de sus popularísimas obras, provocó que esta asociación errónea se propagara con gran rapidez.

entonces se obtienen las infinitas soluciones (x_n, y_n) tales que:

$$x_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{k} 3^{n-2k}\, 8^{2k}$$

$$y_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{k} 3^{n-2k-1}\, 8^{2k}$$

4. La publicación de Euler y sus resultados

La demostración dada por Euler de la conjetura de Fermat sobre los números triangulares bicuadráticos fue presentada parcialmente en varias asambleas de la Academia de Ciencias de San Petesburgo. El artículo de Euler *"Regla simple para resolver fácilmente ecuaciones diofánticas en enteros"* fue presentado a la Academia el 15 de mayo de 1778. Euler dedicó muchos esfuerzos al análisis particular de la ecuación diofántica (*) y más tarde convenció a Lagrange para que continuara sus estudios, que condujeron a la teoría general de las ecuaciones binarias cuadráticas con coeficientes enteros:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Euler y Lagrange comprendieron que la solución de este problema general estaba ligada a la representación de enteros en formas cuadráticas:

$$n = ax^2 + bxy + cy^2$$

lo que dió mayor atractivo al problema, tan ingenuamente tratado por Goldbach. La existencia siempre de solución en enteros de la ecuación (*) fue demostrada por Lagrange en 1770.

Referencias

[1] BOYER, Carl Benjamin. *Historia de la Matemática*, pp. 241, 286, 485, Alianza Editorial, Madrid, 2010.

[2] ESCANDÓN MARTÍNEZ, Covadonga. *Historia de la ecuación de Pell*, http://astroseti.org/articulo/3594/historia-de-la-ecuacion-de-pell

[3] SÁNCHEZ FERNÁNDEZ, Carlos, y ROLDÁN INGUAZO, Rita. *Goldbach. Una conjetura indomable*, Colección: La matemática y sus personajes, pp. 62–66, 1ª ed. Nívola, Madrid, 2009.